C) La connaissance dans le domaine des sciences exactes : la démonstration.

[Conformément à ce que je vous avais annoncé en cours, je mets en ligne un corrigé-type du sujet : « faut-il chercher à tout démontrer ? » C'est la raison pour laquelle je ne reprends pas ci-dessous la totalité du cours sur la démonstration, laissant de côté ce qui se trouve explicitement repris dans le corrigé, c'est-à-dire :

_ la présentation de la démonstration comme idéal de connaissance

_ la nécessité pour toute démonstration de prendre appui sur des indémontrables.

_ l'impossibilité d'exporter la méthode démonstrative hors des mathématiques.

Ces points sont traités dans les parties I et II (et III A) du corrigé. La partie III cherche à mettre en rapport la méthode démonstrative avec d'autres modes de connaissance, comme ceux qui valent pour les sciences de la nature, ou dans le domaine moral.

Les deux points suivants sont donc simplement des éclaircissements liés à des énoncés qui ne sont pas repris dans le corrigé.]

1) <u>Démonstration, axiomes, théorèmes et postulats</u>

Vérifier un énoncé mathématique, c'est le démontrer. Démontrer, c'est montrer que l'on peut construire l'énoncé en utilisant uniquement les *définitions* (du nombre, du cercle, de la racine carrée, etc.) et les *règles fondamentales* des mathématiques (lois logiques + règle de commutativité, de distributivité, etc.) Ces définitions et ces règles fondamentales sont les **axiomes** d'un système mathématique, et l'ensemble des axiomes forme l'axiomatique du système mathématique. Démontrer un énoncé, c'est donc <u>montrer qu'on peut le construire à partir des axiomes</u> (le « déduire » des axiomes).
Un énoncé qui a été démontré (et qu'on utilise ensuite sans le démontrer à nouveau) est un **théorème** ; un énoncé dont on suppose qu'il est vrai (démontrable) sans l'avoir démontré est un **postulat**.

2) <u>Retour sur les indémontrables : les axiomes sont-ils « évidents »</u> ?

Un axiome ne peut pas être démontré : on ne peut pas « démontrer » une définition, et on ne peut pas non plus démontrer que 1 + 1 = 2. Les axiomes sont *choisis*, comme les règles de n'importe quel jeu. Ils ne sont donc ni vrais ni faux ; en fait, ils sont vrais au sens où les nombres premiers sont divisibles (par eux-mêmes), au sens où la Constitution est constitutionnelle, au sens où les règles du jeu de l'oie sont vraies : cela ne veut rien dire.
Cela implique que, en choisissant *d'autres* axiomes, on pourrait construire *d'autres* énoncés, qui ne seraient ni plus vrais, ni plus faux : dans la mesure où un énoncé mathématique est vrai si on peut le construire à partir des axiomes, la vérité d'un énoncé mathématique est toujours relative à l'axiomatique choisie. Je peux très bien construire une arithmétique fondée sur 2 + 2 = 5 ; mais dans ce cas, l'énoncé 4 + 4 = 8 devient faux. De même, je peux construire une géométrie qui refuse l'axiome d'Euclide selon lequel « par un point situé hors d'une droite *D*, je ne peux faire passer qu'une seule droite *D'* parallèle à *D*. » C'est le cas de la géométries de Riemann, dite « non euclidienne », que l'on peut « visualiser » en raisonnant sur un espace sphérique. Pour le mathématicien français Henri Poincaré, les axiomes ne sont que des **conventions**, que l'on choisit pour leur **commodité**, mais qui ne sont ni plus ni moins « vrais » que d'autres axiomes. Si l'on cherche à formuler géométriquement le mouvement de figures géométriques sur un espace sphérique, il sera plus commode (mais pas plus « vrai ») de recourir à une axiomatique non euclidienne.

<u>Conclusion : La nature paradoxale de la démonstration</u> (= de la vérité en mathématiques)

A l'issue de ce parcours, il faut donc retenir trois thèses principales :

a) La vérité d'un énoncé mathématique démontré est « absolue », dans la mesure où a) elle est *définitive* (cet énoncé sera toujours vrai dans ce système) et *universelle* (si l'on peut démontrer l'énoncé « $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ », cet énoncé est vrai pour *toutes* les valeurs de a et de b, sans exception.)

b) Mais elle est aussi *relative*, au sens où sa vérité dépend du système d'axiomes que l'on a choisis. Le choix des axiomes de départ est bel et bien un *choix*, les axiomes sont des *conventions*. La vérité en mathématiques est donc toujours relatives au choix des axiomes de départ.

c) La démonstration n'est pas exportable hors du domaine des mathématiques. En dehors de ce domaine, les seuls énoncés que l'on puisse considérer comme absolument certains, car indépendants de toute expérience, sont les jugements *analytiques*, qui sont de simples explicitations de concepts. Hors du domaine des mathématiques, tout jugement synthétique suppose le recours à l'expérience, qui ne nous donne jamais la possibilité de considérer le jugement comme *nécessairement* vrai. Il n'y a de jugement synthétiques *a priori* qu'en mathématiques. Par ailleurs, toute démonstration suppose que l'on prenne appui sur des concepts dont le sens soit clairement établi ; or il n'y a qu'en mathématiques que l'on peut produire de véritables *définitions* de concepts ; hors des mathématiques, c'est encore à l'expérience que nous devons nous adresser pour construire nos caractérisations, qui comme telles restent toujours incomplètes ou polémiques, méritant donc le nom « d'expositions », mais non de définitions.