La vérité, la science, la raison

3) *Du cœur aux conventions : l'enjeu des géométries non euclidiennes*

Il existe une autre possibilité pour éviter de prendre appui sur ces « évidences du cœur », sans nier la régression infini qu'impliquerait le fait de vouloir « tout définir, tout démontrer ». C'est la possibilité qui consiste à dire qu'en effet, toute démonstration doit bien « partir de quelque part », et qu'il est nécessaire de poser au départ des principes que l'on ne démontre plus pour pouvoir démontrer quelque chose : toute démonstration prend appui sur des axiomes non démontrables. MAIS, plutôt que d'affirmer que ces axiomes sont néanmoins *vrais,* comme l'atteste la lumière naturelle de l'évidence telle qu'elle se manifeste au cœur, on peut affirmer que ces principes.... **ne sont ni vrais ni faux**, mais qu'ils sont de simples ***conventions*** sur lesquelles on s'accorde, comme on s'accorde sur les règles du jeu de poker ou du jeu de l'oie. On ce sens, les « axiomes » de la géométrie ne sont donc pas dictés par le « coeur »... mais on pourrait très bien en prendre d'autres !

Comment comprendre cette idée ?

Procédons par ce qui peut sembler être une démarche absurde : choisissons d'autres axiomes que ceux de la géométrie classique (que l'on appelle : géométrie « **euclidienne** », du nom du plus fameux mathématicien de l'Antiquité.)

Affirmons donc les « axiomes » suivants :

a. la somme des angles d'un triangle est toujours ***supérieure*** (et non égale) à deux angles droits

b. Par un point *P* situé hors d'une droite (D), on ne peut faire passer ***aucune*** droite parallèle à la première (en géométrie euclidienne, on peut toujours en faire passer une, et une seule)

c. Par deux points P et P', il est parfois possible de faire passer ***une infinité*** de droites (et non une, et une seule, comme le veut la géométrie euclidienne)

Nous nageons, c'est évident, en plein délire. Mais n'est-ce pas ce à quoi nous condamne le fait de choisir d'autres axiomes que ceux que nous dicte « le coeur » ?

Mais après tout, ces « axiomes » sont-ils si délirants ? N'y a-t-il des cas où ces axiomes s'avéreraient *bien pratiques* pour modéliser mathématiquement ce que l'on observe ? N'y a-t-il pas des cas où ils seraient plus « commodes » ?

Si. Il suffit de songer à ce qu'il se produit si, au lieu de raisonner sur un espace plan (comme un écran), on regarde ce qu'il se passe sur un espace *sphérique* (comme une coupole). Supposons que je projette un triangle sur une boule : le triangle que j'obtiens a bien des angles... dont **la somme est supérieure à deux angles droits.**

Supposons maintenant que je projette une droite. Une droite, c'est l'ensemble des points situés à égale distance de deux points. Cette « droite », sur la sphère, devient donc un « grand cercle », c'est-à-dire un cercle dont le rayon est le rayon de la sphère. Et si je me demande combien de « grands cercles » je peux faire passer par un point situé hors d'un autre grand cercle, la réponse est... qu'**il n'y en a pas.** Si je « colle » un cerceau qui a le même diamètre que la sphère sur la sphère elle-même, il me sera absolument impossible de placer un autre cerceau sur la sphère, qui sera parallèle au premier.

Et combien de droites (de « grands cercles ») puis-je faire passer par deux points ? En règle générale, il est clair que je ne pourrai en faire passer qu'un. Dès que je fais tourner mon cerceau, il sort du plan (il se décolle de la sphère). Mais que se passe-t-il si les deux points en question sont deux points *opposés* sur la sphère ? Combien de positions puis-je donner à mon cerceau, sans qu'il décolle de la sphère, si je le tiens fermement aux deux pôles de la sphère ? La réponse est claire : **une infinité**. Je peux faire « tourner » mon cerceau, sans qu'il décolle de la sphère, en le faisant pivoter autour des pôles.

Conclusion : si le plan de référence sur lequel se produisent les phénomènes que je cherche à représenter mathématiquement est un espace sphérique, j'ai tout intérêt à abandonner les axiomes de la géométrie euclidienne, pour prendre appui sur les axiomes « délirants » que nous avions posé au départ. En d'autres termes : j'ai intérêt à passer en **« géométrie non euclidienne »**. Celle que nous venons d'utiliser est la géométrie dite « de Riemann ».

Quelle est alors la « vraie » géométrie ? Cette question n'a manifestement aucun sens ; elle reviendrait à demander si un espace plan est plus vrai » qu'un espace sphérique ! On doit donc dire qu**'aucune des deux géométries n'est plus « vraie » que l'autre**. Comme le dira le plus grand des mathématiciens français de l'époque contemporaine, Henri Poincaré, il est seulement **plus « commode »** de raisonner en géométrie euclidienne lorsque l'on cherche à modéliser mathématiquement des événements qui se déroulent sur un espace plan, mais il sera plus « commode » de raisonner en géométrie riemanienne si l'on calcule des trajectoires sur une surface sphérique.

Les axiomes de la géométrie euclidienne ne sont pas plus « vrais » que ceux de la géométrie « riemanienne » : ils sont seulement plus ou moins « commodes » en fonction de ce que l'on cherche à modéliser.

On aboutit ainsi à une position que l'on appelle « conventionnaliste ».

Que peut-on en déduire concernant la démonstration ? L'optique pascalienne était désagréable en ce qu'elle faisait reposer tout le savoir obtenu par démonstration (et donc tout le savoir mathématique) sur des énoncés **qui n'avaient d'autre certitude que celle du « coeur »**.

L'optique de Poincaré aboutit, elle, au fait que tout savoir démonstratif (et donc tout le savoir mathématique) repose sur des énoncés **qui ne sont ni vrais, ni faux**, mais qui sont plus ou moins « **commodes** ».

Quelle que soit l'optique choisie, on voit que la conclusion pour la question qui nous occupe est identique. Les mathématiques **ne sont pas un savoir absolument rationnel, logique** ; tout le savoir mathématique, toutes les démonstrations reposent sur des énoncés, les axiomes, que **la raison ne peut absolument pas démontrer.** Soit les axiomes sont dictés par « le **coeur** », soit ce sont de simples **conventions** que l'on choisit (mais on pourrait en choisir d'autres).

Alors : la somme des angles des triangles *est-elle* égale à deux droits ? Il est impossible de répondre par la seule raison à cette question. Un adepte de Pascal répondra : « oui, car *le cœur* nous le dit ». Un adepte de Poincaré répondra « cela dépend, quelle axiomatique choisissez-vous ? »

Et la raison, par elle-même, ne peut pas répondre.